Zu »Folgen: explizit und rekursiv«

(W. Tysiak in MNU **45** (1992) 15–17)

Von Wolfgang Tysiak, Briller Straße 44, 5600 Wuppertal 1

Nach meinem Artikel erreichten mich einzelne Briefe und Telefonate, die sich überwiegend auf die direkte Darstellung der Fibonacci-Folge bezogen. Ich muß mich an dieser Stelle erst einmal dafür entschuldigen, daß die Formel für die Fibonacci-Folge leider etwas durcheinander geraten ist und falsch angegeben war. Richtig muß es lauten:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Außerdem sollte es bei der rekursiven Darstellung lauten: $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$.

Gerade am Beispiel der Fibonacci-Folge läßt sich das in meinem Artikel Angesprochene noch recht gut weiter ausführen:

So wird z. B. in [1] (leider nicht ganz korrekt) mittels Induktion und rekursiver Darstellung gezeigt, daß gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots,$$

d. h., der Quotient zweier benachbarter Fibonacci-Folgen strebt gegen das Verhältnis des »goldenen Schnitts«. Aus der direkten Darstellung kann man dieses Ergebnis aber praktisch unmittelbar erkennen.

Außerdem wird in [1] die Lukas-Folge betrachtet, die definiert ist durch:

$$L_1 = 2,\quad L_2 = 1,\quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

und gezeigt, daß die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Lucas-Zahlen ebenfalls gegen das Verhältnis des »goldenen Schnitts« konvergieren. Dies ist aber auch sofort einzusehen, denn wie in Teil 4 meines Artikels ausgeführt wird, hat jede Zahlenfolge (a_n), die der Bedingung

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

genügt, die Gestalt

$$a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Die Koeffizienten α und β werden dann aus der Initialisierung der Zahlenfolge für die zwei ersten Folgenglieder bestimmt. (Die Zahlenfolgen, die der Fibonaccischen Summationsbedingung genügen, bilden also einen Vektorraum der Dimension 2!)

Abschließend möchte ich noch auf das Buch [2] hinweisen, in welchem die Fibonacci-Folge recht umfassend (z. B. auch mit zahlentheoretischen und geometrischen Aspekten) dargestellt wird. Einzelne Kapitel dieses Buches eignen sich m. E. sehr gut zur Behandlung in mathematischen Arbeitsgruppen oder in Leistungskursen.

Literatur

[1] A. Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. – Stuttgart: Klett 1977.

[2] N. N. Worobjow: Die Ficonaccischen Zahlen. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.