

Noch einmal zu »Arnolds Katze im Wunderland«

(J. SCHLICHTING - U. BACKHAUS in MNU 45 (1992) 3-7)

Qualität statt Quantität

Verfasser: Dr. Wolfgang Tysiak, Briller Straße 44, 5600 Wuppertal 1

Im Aufsatz [1] werden einige interessante Aspekte (Ergodizität, Mischen) sehr anschaulich dargestellt. Die Iteration der Arnoldschen Katze kann auch sicherlich sehr motivierend für Schüler sein, sich mit dynamischen Systemen und Chaostheorie zu beschäftigen.

Leider muß ich allerdings eine kritische Anmerkung machen: Am Ende des Aufsatzes heißt es: »Die Wiederkehrzeit hängt natürlich von der Größe des Systems ab. In unserem »System«, das aus einem Quadrat aus 400×400 Bildpunkten besteht, wird die Katze bereits nach einer »Zeit« von 300 Transformationen exakt reproduziert. Bei noch kleineren Quadraten geschieht dies noch früher.« Dies erweckt den Eindruck, als hinge die Wiederkehrzeit in erster Linie von der Quantität der Punkte ab. Entscheidend für das Vorliegen von periodischen Orbits ist aber die Qualität der Ausgangspunkte.

Betrachten wir dazu einmal zur Illustration Ausgangspunkte auf der Diagonalen, d. h. $x_0 = y_0$ und damit

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0, & y_1 &= 3y_0, \\ x_2 &= 5x_0, & y_2 &= 8y_0, \\ x_3 &= 13x_0, & y_3 &= 21y_0, \\ x_4 &= 34x_0, & y_4 &= 55y_0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die genaue Folge der Koeffizienten soll hier gar nicht weiter diskutiert wer-

den, sondern es soll nur herausgestellt werden, daß es zwei Folgen (a_n) und (b_n) natürlicher Zahlen gibt mit $x_n = a_n x_0$ und $y_n = b_n y_0$. Periodizität, d. h. Wiederkehr des Ausgangspunktes nach m Iterationen, bedeutet dann aber

$$\begin{aligned} x_m &\equiv x_0 \pmod{1} \\ \Rightarrow a_m x_0 &\equiv x_0 \pmod{1} \\ \Rightarrow \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} &\text{ mit } a_m x_0 - x_0 = k \\ \Rightarrow \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} &\text{ mit } x_0 = k/(a_m - 1) \\ \Rightarrow x_0 &\text{ ist rational} \end{aligned}$$

Analoges gilt natürlich für y_0 .

Dies bedeutet, daß Periodizität überhaupt nur für rationale Zahlen auftreten kann. Ein einzelner irrationaler Punkt wird auch nach beliebig vielen Iterationen nicht wieder in seine Ausgangslage zurückkommen. Periodizität hängt also entscheidend von der Rationalität oder Irrationalität der Startwerte ab. Gerade dies ist ein Aspekt, der in Computersimulationen nicht berücksichtigt werden kann, da ein Computer nicht mit unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüchen rechnen kann. Man rechnet ja quasi nur in einem endlichen Restklassenring. Es sollte daher noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Wiederkehr der Arnoldschen Katze entscheidend davon abhängt, daß die Transformation eines dieser 400×400 rationalen Bildpunkte auch nur wieder einer dieser 400×400 Bildpunkte sein kann.

In diesen Zusammenhang paßt auch sehr gut eine Bemerkung aus [2] über den Fields-Medaillen-Träger und Pionier der Chaostheorie STEPHEN SMALE: »Smale etwa hatte seine Freude an Beispielen folgender Art: Man nehme eine beliebige Zahl, einen Bruch zwischen eins und null, und verdoppele sie. Sodann eliminiere man alles links vom Komma. Danach wiederhole man den gesamten Vorgang.

Da die meisten Zahlen im Detail irrational und unvorhersagbar sind, ist das Ergebnis des gesamten Vorgangs eine unvorhersagbare Zahlenreihe. Ein Physiker möchte darin lediglich eine banale mathematische Bizarrerie erblicken, völlig bedeutungslos, zu einfach und zu abstrakt zugleich, um irgendwelchen Nutzen zu bringen. Smale jedoch erkannte instinktiv, daß dieser mathematische Trick unzähligen physikalischen Systemen zugrunde liegen mußte.«

Abschließend möchte ich auch noch eine Bemerkung zum Aspekt »explizite und rekursive Folgen« (vgl. [3]) anfügen. Auch die Iteration der Arnoldschen Katze kann als explizite Folge dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_0 \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \frac{y_0}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &\quad + \left(x_0 \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} - \frac{y_0}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ y_n &= \left(\frac{x_0}{\sqrt{5}} + y_0 \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &\quad - \left(\frac{x_0}{\sqrt{5}} - y_0 \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

jeweils natürlich modulo 1.

Wie im Falle der Fibonacci-Folge in [3] könnte man also auf diese Weise den Punkt (x_n, y_n) berechnen, ohne vorher die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ iteriert zu haben.

Literatur

- [1] J. SCHLICHTING - U. BACKHAUS: Arnolds Katze im Wunderland. - MNU 45 (1992) 3-7.
- [2] J. GLEIK: Chaos - die Ordnung im Universum. - München: Droemische Verlagsanstalt 1988. S. 102.
- [3] W. TYSIAK: Folgen: explizit und rekursiv. - MNU 45 (1992) 15-17. \square