

Diskussion und Kritik

Zu »Überraschende Ordnungen bei den Fibonacci-Zahlen«

(G. HEPP in MNU 48 (1995) 214-216)

Schon wieder Fibonacci¹

Von Dr. Wolfgang Tysiak, Gartenstraße 119, 42107 Wuppertal

Mit Interesse habe ich den Beitrag von Herrn HEPP über Ordnungen bei Fibonacci-Zahlen gelesen. Dieser endet mit der Anregung weiterer Untersuchungen. Hierzu möchte ich einige Ergänzungen machen.

Es findet sich bereits in [1] eine Tabelle über die Periodenlänge $L(m)$ bis zum Modul $m = 125$. Weiterhin kann man dort auch schon etwas über die »Struktur« der Periodenlänge erfahren:

$$\text{Für Primzahlen } p \text{ gilt: } L(p^n) = L(p) \cdot p^{n-1} \quad (1)$$

Für eine Primfaktorzerlegung $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ gilt:

$$L(p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}) = \text{kgV}(L(p_1^{\alpha_1}), \dots, L(p_r^{\alpha_r})). \quad (2)$$

Somit benötigt man nur noch $L(p)$ für alle Primteiler einer Zahl m , um unmittelbar ihre Periodenlänge bestimmen zu können, z. B.

¹ Weitere Beiträge gingen bisher von Dr. D. Berntzen, Hamm, und StD H. W. Gerke, Neustadt a. Rbge. ein.

$$\begin{aligned} L(144) &= L(2^4 \cdot 3^2) = \text{kgV}(L(2^4), L(3^2)) \\ &= \text{kgV}(2^3 \cdot L(2), 3 \cdot L(3)) \\ &= \text{kgV}(8 \cdot 3, 3 \cdot 8) \\ &= \text{kgV}(24, 24) = 24 \end{aligned}$$

und

$$L(169) = L(13^2) = 13L(13) = 13 \cdot 28 = 364.$$

Wegen (1) kann man sagen, daß die Periodenlänge eines Moduls m tendenziell wächst, wenn größere Exponenten in der Primfaktorzerlegung auftreten. Oder, um mit (2) in ergänzender Weise zu argumentieren, kann man sagen, daß die Periodenlänge eines Moduls m tendenziell fällt, je mehr unterschiedliche Primfaktoren auftreten.

Die Anordnung der Zahlen im Quadrat stellt nun quasi eine Überlagerung von modulo m und modulo m^2 dar. Inwiefern sich ein »Flickenteppich« oder eine »Wohlordnung in Spalten« ergibt, hängt m. E. vom Verhältnis $L(m)/L(m^2)$ ab: je kleiner dieser Wert, desto »größer« die Ordnung des Bildes.

Man beachte beispielsweise

$$L(13)/L(169) = 28/364 = 0,077$$

und

$$L(12)/L(144) = 24/24 = 1.$$

Offen bleibt aber auch noch das Problem der Bestimmung der Periodenlänge $L(p)$ für Primzahlen p . Die besten mir bekannten Ergebnisse hierzu finden sich in [2]. Diese Arbeit beschäftigt sich im weitesten Sinne auch mit der »bildnerischen Konkretisierung der Gedanken«, nämlich der Arnoldschen Katze (vgl. [3]). Gerade die Fibonacci-Zahlen scheinen hierzu be-

sonders anzuregen. Deshalb sei an dieser Stelle noch einmal auf das Buch [4] hingewiesen, welches sicherlich einige interessante Anregungen enthält.

Literatur

- [1] A. ENGEL: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. - Stuttgart: Klett 1977.
- [2] J. D. FREEMAN - H. FALK: Period of a discrete cat mapping. - Amer. Math. Monthly 99 (1992) 603-614.
- [3] J. SCHLICHTING - U. BACKHAUS: Arnolds Katze im Wunderland. - MNU 45 (1992) 3-7.
- [4] N. N. WOROBJEW: Die Fibonacci'schen Zahlen. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971. □